

Adı Soyadı :

16.04.2022

Numara :

### MAT 302 DİFERENSİYEL GEOMETRİ II DERSİ ARASINAV SORULARI

SORU 1:

$$\alpha: I \rightarrow E^3, \alpha(s) = \left( 5 \cos \frac{s}{13}, 5 \sin \frac{s}{13}, \frac{12s}{13} \right) \text{ eğrisinin}$$

a)  $s \in I$  parametresinin yay-parametresi olup olmadığını inceleyiniz, (10 Puan)

b)  $\alpha(0)$  noktasındaki Frenet 3-ayaklısını bulunuz, (20 Puan)

c)  $\alpha(0)$  noktasındaki rektifiyan düzleminin denklemini bulunuz. (10 Puan)

SORU 2:

$$\alpha(t) = \left( \sqrt{3} \cos \frac{t}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} \sin \frac{t}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} \right) \text{ eğrisinin } \kappa \text{ eğriliğini ve } \tau \text{ burulmasını}$$

bulunuz.

SORU 3:

$E^3$  de yay-parametereli bir  $\alpha$  eğrisinin Frenet vektörleri  $V_1, V_2, V_3$  ve eğrilikleri  $k_1, k_2$  olmak üzere

$$V_2' = -k_1 V_1 + k_2 V_3$$

dır. İspatlayınız.

SORU 4:

$E^3$  de bir  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilen yay-parametereli bir eğri olsun.  $M$  düzlemsel bir eğri ise  $\tau = 0$  dır. İspatlayınız.

Not: 1. soru 40 diğer sorular 20 puan ve süre 90 dakikadır.

Başarılar

Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

### CEVAP ANAHTARI

1) a)  $\alpha'(s) = \left( -\frac{5}{13} \sin \frac{s}{13}, \frac{5}{13} \cos \frac{s}{13}, \frac{12}{13} \right)$  olup

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\frac{25}{169} \left( \sin^2 \frac{s}{13} + \cos^2 \frac{s}{13} \right) + \frac{144}{169}} = 1$$

olduğundan  $s$  yay-parametresidir.

b)  $T(0) = \alpha'(0) = \left( 0, \frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right)$  olur.

$$\alpha''(s) = \left( -\frac{5}{13^2} \cos \frac{s}{13}, -\frac{5}{13^2} \sin \frac{s}{13}, 0 \right) \Rightarrow \alpha''(0) = \left( -\frac{5}{13^2}, 0, 0 \right) \text{ dir.}$$

$$\|\alpha''(0)\| = \frac{5}{13^2} \text{ olup}$$

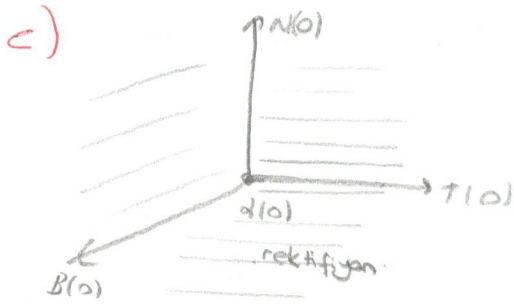
$$N(0) = \frac{\alpha''(0)}{\|\alpha''(0)\|} = \frac{13^2}{5} \left(-\frac{5}{13^2}, 0, 0\right) = (-1, 0, 0) \text{ bulunur. Ayrıca}$$

$$B(0) = T(0) \times N(0) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= e_1(0) - e_2\left(\frac{12}{13}\right) + e_3\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$= \left(0, -\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$$

elde edilir.



Rektilifiyon düzleminin normal vektörü

$N(0) = (-1, 0, 0)$  dir. 0 halde bu düzlemin

denklemini

$$-x + d = 0$$

olar.  $\alpha(0) = (5, 0, 0)$  düzlemde bir nokta

olduğundan  $-5 + d = 0 \Rightarrow d = 5$

olup rektilifiyon düzleminin denklemini

$$x = 5$$

olarak bulunur.

2)  $t$  yay-parametresi midir?

$$\alpha'(t) = \left(-\sin \frac{t}{13}, \cos \frac{t}{13}, 0\right) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sin^2 \frac{t}{13} + \cos^2 \frac{t}{13}} = 1$$

olduğundan  $t$  yay-parametresidir.

$$\alpha''(t) = \left(-\frac{1}{13} \cos \frac{t}{13}, -\frac{1}{13} \sin \frac{t}{13}, 0\right) \Rightarrow \|\alpha''(t)\| = \sqrt{\frac{1}{3} \left(\sin^2 \frac{t}{13} + \cos^2 \frac{t}{13}\right)} = \frac{1}{13}$$

olup

$$N(t) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|} = \left(-\cos \frac{t}{13}, -\sin \frac{t}{13}, 0\right), T(t) = \left(-\sin \frac{t}{13}, \cos \frac{t}{13}, 0\right)$$

bulunur.

2. cevabın devamı)

$$\begin{aligned} B(t) = T(t) \times N(t) &= \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin \frac{t}{\sqrt{3}} & \cos \frac{t}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\cos \frac{t}{\sqrt{3}} & -\sin \frac{t}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= e_1(0) - e_2(0) + e_3 \left( \sin^2 \frac{t}{\sqrt{3}} + \cos^2 \frac{t}{\sqrt{3}} \right) \\ &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

bulunur.

$$T'(t) = K(t) \cdot N(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \left( -\cos \frac{t}{\sqrt{3}}, -\sin \frac{t}{\sqrt{3}}, 0 \right) = K(t) \cdot \left( -\cos \frac{t}{\sqrt{3}}, -\sin \frac{t}{\sqrt{3}}, 0 \right)$$

$$\Rightarrow K(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

olar

$$\| K(t) = \| \alpha''(t) \| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$B'(t) = -\tau(t) \cdot N(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (0, 0, 1) = -\tau(t) \cdot \left( -\cos \frac{t}{\sqrt{3}}, -\sin \frac{t}{\sqrt{3}}, 0 \right)$$

$$\Rightarrow (0, 0, 0) = \tau(t) \left( \cos \frac{t}{\sqrt{3}}, \sin \frac{t}{\sqrt{3}}, 0 \right)$$

$$\Rightarrow \tau(t) = 0$$

bulunur.

3. ve 4. soruların cevapları ders notunda mevcuttur.